

Review

Of the Ph.D. Thesis by Janar Askerbekkyzy Askerbekova “Numerical Modeling of Continuation Problems for the Acoustic and Helmholtz Equation” submitted for fulfillment of the Ph.D. candidacy requirement in the specialty “6D070500 – Mathematical and Computer Modeling”

The thesis is concerned with the development, implementation and analysis of methods for numerical solution of continuation problem for the Helmholtz and Acoustic equations. The considered problems are among the most complex ill-posed problems arising in acoustic tomography. The author develops and implements several novel efficient numerical algorithms for continuation problems and the related inverse problems in time-dependent and frequency domains. A difficulty in the numerical solution is that the considered problems of continuation are ill-posed and are regularized by reducing them to inverse problem of determining boundary data on a part of the boundary. An additional difficulty in the numerical solution is that the solution domain is triangle in $1D+T$ and a triangular prism in $2D+T$. The author proposes novel approached to the solution of the inverse problems and demonstrates accuracy and efficiency of the methods on a few benchmark problems.

The thesis consists of an introduction, three chapters, and a reference section. The introduction discusses the motivation for the problem, its timeliness, and provides a comprehensive review of the relevant literature. It highlights the objectives and the novelty of the obtained results and provides a summary of the approaches. Chapter 1 is concerned with the development of an efficient algorithm for the solution of the continuation problem from a portion of the boundary for one-dimensional acoustic equation. The continuation problem consists of finding a function based on the information about the function on a portion of the boundary. The author reduces the

continuation problem to the problem of finding data on a time-like boundary, analyses various methods of solutions of the inverse problem and proposes an efficient algorithm based on inversion of the numerical scheme. Specifically, the author proposes a finite-difference scheme that is suitable for a triangular time-space domain and the unknown function is determined by solving the corresponding linear problem. Efficiency of the approach is illustrated on a benchmark problem. Chapter 2 is concerned with a two-dimensional continuation problem arising in acoustics. The problem is regularized by reducing it to an inverse problem of finding data on a time-like portion of the boundary. The inverse problem is solved by introducing a cost function measuring the residual in the problem data and by minimizing the cost function using a Landweber iteration. The main result of the chapter and of the thesis is the development and implementation of a projection scheme for solving the direct problem for acoustic equation as a part of the optimization approach for solving two-dimensional inverse acoustic problem in a triangular time-like domain. The author derives the expressions for the gradient of the cost function, which is proved to be the solution to an adjoint direct problem. A solution to the inverse problem leads to formulation of an algorithm for solving the continuation problem in a time-like triangular domain. Chapter 3 is concerned with the development and implementation of numerical solution of direct and inverse problems for Helmholtz equation in frequency domain. The author considers an ill-posed problem of determining solution based on Dirichlet and Newman data on a partial domain boundary. The author regularizes the problem by replacing it with an inverse problem for Dirichlet data on a part of the boundary. The inverse problem is solved using an optimization algorithm. The author establishes the expressions for the gradient of the cost function based on the solution of direct and adjoint problems and formulates a numerical algorithm for solving the inverse problem based on Landweber iteration. Additionally, an algorithm is proposed and implemented for solving the continuation problem using the inverse problems and the optimization approach.

The author presents detailed computational analysis of accuracy and stability of the methods and discusses advantages and shortcomings of the methods. The developed approaches represent an important step towards solution of inverse problem of acoustic and electromagnetic wave propagation in complex media. The presented numerical experiments illustrate the efficiency and high accuracy of the obtained solutions.

The obtained results are significant and important for the development of theory and practice of numerical solution of inverse problems.

To the knowledge of the consultant, the obtained results are new. The publications of the author are representative of the work completed in this thesis. The results were presented at international mathematical conference in Turkey, and Kazakhstan.

The candidate, Janar Askerbekkyzy Askerbekova, demonstrated a significant research capacity by accomplishing the results of the thesis, including the high potential for conducting independent research. Overall, the thesis is a high-quality work with high scientific value and practical importance.

I believe that the presented work of Janar Askerbekkyzy Askerbekova fully meets the requirements of a Ph.D. thesis. I recommend that she is granted the scientific title of a Doctor of Philosophy (Ph.D.) in the specialty “6D070500 – Mathematical and Computer Modeling”.

International Scientific Consultant, Ph.D.
Professor of Department of Mathematics,
California State University, Northridge



A.M. Alekseenko

May 25, 2023

4

**Әскербекова Жанар Әскербекқызының «6D070500 –
Математикалық және компьютерлік модельдеу» мамандығы бойынша
философия докторы (PhD) дәрежесін алу үшін ұсынылған «Акустика
және Гельмгольц теңдеулері үшін жалғастыру есептерін сандық
модельдеу» тақырыбындағы диссертациялық жұмысына ұсынылған**

ПІКІР

Диссертация Гельмгольц және акустикалық теңдеулер үшін жалғастыру есебін сандық шешу әдістерін әзірлеуге, енгізуге және талдауға арналған. Қарастырылған есептер акустикалық томографияда туындайтын ең күрделі мәселелердің бірі болып табылады. Автор уақытқа тәуелді және жиілік облыстарындағы жалғастыру есептері мен кері есептер үшін бірнеше жаңа тиімді сандық алгоритмдерді әзірледі және енгізді. Сандық шешімнің қиындығы мынада: қарастырылатын есептердің дұрыс қойылмағандығы және оларды шекараның бір бөлігіндегі шекаралық мәліметтерді анықтаудың кері есебіне келтіру арқылы реттеген. Сандық шешімдегі қосымша қиындық - шешім облысы $1D+T$ -де үшбұрыш және $2D+T$ -де үшбұрышты призма. Автор кері есептерді шешудің жаңа тәсілін ұсынып, бірнеше эталондық есептермен әдістердің дәлдігі мен тиімділігін көрсетеді.

Дипломдық жұмыс кіріспеден, үш тараудан және сілтемелер бөлімінен тұрады. Кіріспеде есептің уәжділігі, оның өзектілігі талқыланып, тиісті әдебиеттерге жан-жақты шолу жасалады. Онда мақсаттар мен алынған нәтижелердің жаңалығын көрсетеді және тәсілдердің қысқаша мазмұнын береді. 1-тарау бір өлшемді акустика теңдеуі үшін шекараның бөлігінен жалғастыру есебін шешудің тиімді алгоритмін құруға қатысты. Жалғастыру есебі шекараның бөлігінде шешім туралы ақпаратқа негізделген функцияны табудан тұрады. Автор жалғастыру есебін уақытқа тәуелді шекарадағы деректерді табу есебіне келтіреді, кері есепті шешудің әртүрлі әдістерін

талдайды және сандық сұлбаны кері келтіру әдісіне негізделген тиімді алгоритмі ұсынылған. Атап айтқанда, автор үшбұрышты уақыт-кеңістік облысы үшін қолайлы айырымдық сұлбасын ұсынды және белгісіз функция сәйкес сызықтық тендеуді шешу арқылы анықталған. Әдістің тиімділігі эталондық есеппен суреттелген. 2-тарау акустикада туындайтын екі өлшемді жалғастыру есебіне қатысты. Есеп шекараның уақытқа ұқсас бөлігіндегі деректерді табудың кері есебіне келтіру арқылы реттеледі. Кері есеп деректердегі қалдықты өлшейтін мақсатты функционалды енгізу және Landweber итерациясын пайдалана отырып, мақсатты функционалды минималдау арқылы шешіледі. Тараудың және дипломдық жұмыстың негізгі нәтижесі үшбұрышты уақытқа ұқсас екі өлшемді акустикалық кері есепті шешуге арналған оңтайландыру тәсілінің бөлігі ретінде акустикалық тендеу үшін тура есепті шешудің проекциялық схемасын әзірлеу және жүзеге асыру болып табылады. Автор түйіндес және тура есептің шешімі болатыны дәлелденген мақсаттық функционалдың градиенті үшін өрнектерді қорытып шығарды. Кері есептің шешімі уақыт тәрізді үшбұрыш облыста жалғастыру есебін шешу алгоритмін құрастыруға әкеледі. 3 - тарауда Гельмгольц тендеуінің жиілік аймағындағы тура және кері есептердің сандық шешімін әзірлеу және енгізу қарастырылған. Автор жартылай облыс шекарасындағы Дирихле мен Нейман деректеріне негізделген шешімді анықтаудың нашар қойылған есебін қарастырады. Автор есепті шекараның бір бөлігіндегі Дирихле деректері үшін кері есеппен алмастыру арқылы реттейді. Кері есеп оңтайландыру алгоритмі арқылы шешіледі. Автор тура және түйіндес есептерді шешу негізінде мақсаттық функционалдың градиентін есептейді және Ландвебер итерациясына негізделген кері есепті шешудің сандық алгоритмін тұжырымдайды. Сонымен қатар, кері есеп үшін оңтайландыру тәсілін пайдалана отырып, жалғастыру есебін шешудің алгоритмі ұсынылды және енгізілді.

Автор әдістердің дәлдігі мен тұрақтылығын егжей-тегжейлі есептеу талдауын ұсынады және әдістердің артықшылықтары мен кемшіліктерін талқылайды. Әзірленген әдістер күрделі ортада акустикалық және электромагниттік толқындардың таралуының кері есептерін шешу жолындағы маңызды қадам болып табылады. Ұсынылған сандық тәжірибелер алынған шешімдердің тиімділігі мен жоғары дәлдігін көрсетеді.

Алынған нәтижелер кері есептерді сандық шешудің теориясы мен тәжірибесін дамыту үшін маңызды.

Ғылыми кеңесшінің білуі бойынша, алынған нәтижелер жаңа. Автордың жарияланымдары осы дипломдық жұмыста аяқталған жұмыстың өкілі болып табылады. Жұмыс нәтижелері Түркияда, Әзербайжанда және Қазақстанда өткен халықаралық математикалық конференцияларда баяндалды.

Үміткер Жанар Әскербекқызы Әскербекова жұмыстың нәтижелерін орындай отырып, айтарлықтай ғылыми-зерттеу қабілетін, оның ішінде тәуелсіз зерттеулер жүргізудің жоғары әлеуетін көрсетті. Жалпы алғанда, диссертацияның ғылыми құндылығы мен практикалық маңыздылығы жоғары, сапалы жұмыс болып табылады.

Жанар Әскербекқызы Әскербекованың ұсынылған жұмысы Ph.D. докторлық диссертация талаптарына толық сәйкес келеді деп есептеймін. Оған «6D070500 – Математикалық және компьютерлік модельдеу» мамандығы бойынша философия докторы (Ph.D.) ғылыми атағын беруді ұсынамын.

Халықаралық ғылыми кеңесші, Ph.D.
математика кафедрасының профессоры,
Калифорния штаты университеті, Нортриджд
25 мамыр, 2023 жыл.

А.М. Алексеенко